

Gradi di libertà e vincoli

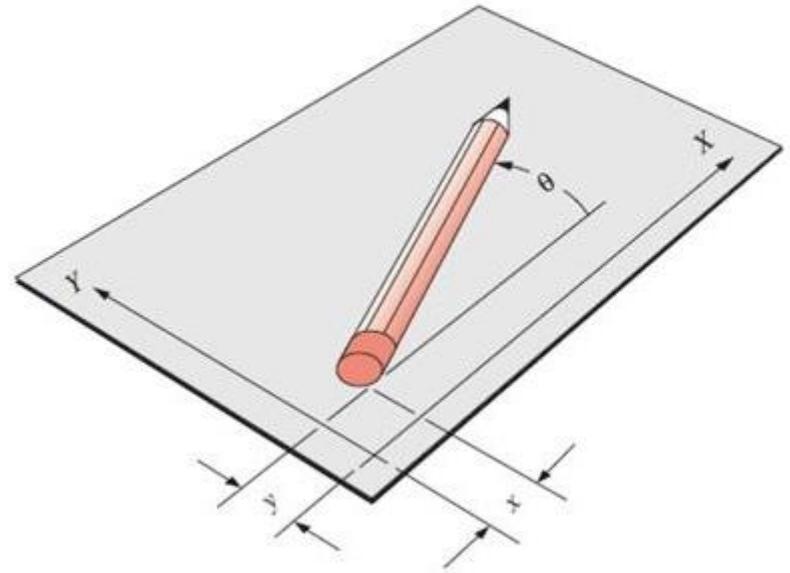
Moti del corpo libero

Punto materiale

- Il punto materiale descrive un corpo di cui interessa individuare solo la sua posizione
- Nel piano la posizione di un punto si individua con due coordinate cartesiane
- Nello spazio la posizione di un punto si individua con tre coordinate cartesiane
- In fisica il **numero di gradi di libertà** di un punto materiale è il numero di variabili indipendenti necessarie per determinare univocamente la sua posizione nello spazio
- Nel piano il punto materiale avrà due gradi di libertà (gdl)
- Nello spazio il punto materiale avrà tre gradi di libertà

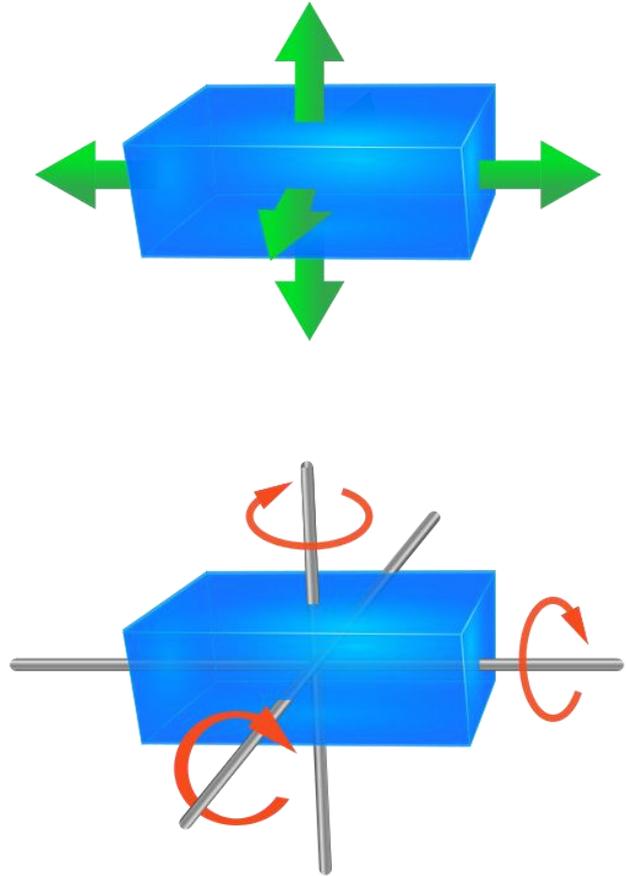
Corpo rigido nel piano

- Quando il punto materiale non descrive correttamente il dettaglio del moto si passa al corpo rigido
- Il corpo rigido ha tre gradi libertà nel piano: due traslazioni ed una rotazione
- Per identificare la posizione della matita sono necessarie tre misure. Pertanto la matita nel piano ha tre gradi di libertà



Corpo rigido nello spazio

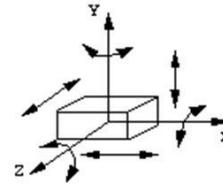
- Il corpo rigido ha sei gradi di libertà nello spazio: tre traslazioni e tre rotazioni
- Per identificare la matita nello spazio servono sei misure: tre coordinate per il punto di estremità e tre angoli per orientarne l'asse



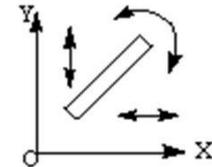
Gradi di libertà

- Possiamo pensare ai gradi di libertà come alle possibilità di movimento dell'entità che stiamo considerando in funzione dello spazio in cui l'entità si trova
- Lo stesso corpo in spazi diversi, presenta gradi di libertà diversi
- Il grado di libertà è un concetto cinematico, è legato alla posizione del corpo ed alle sue possibilità di moto

1.6 DEGREE OF FREEDOM (DOF) OR MOBILITY



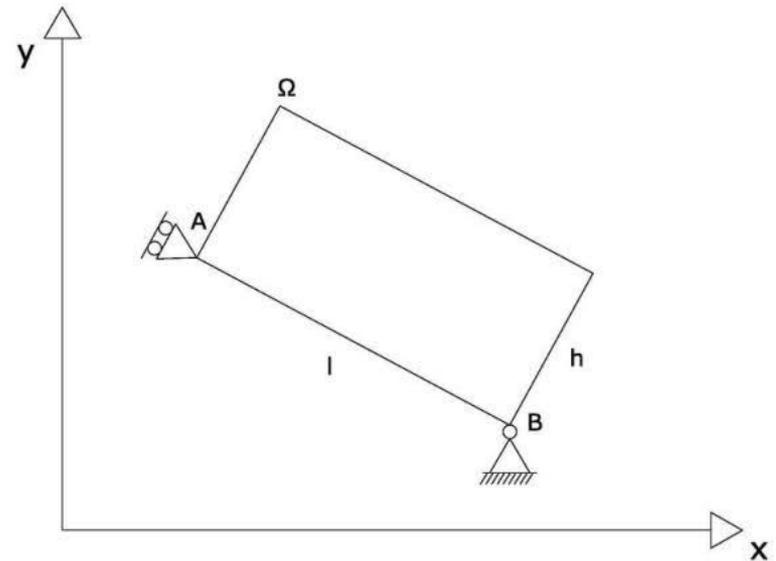
DOF of rigid body in Space



DOF of Rigid body in Plane

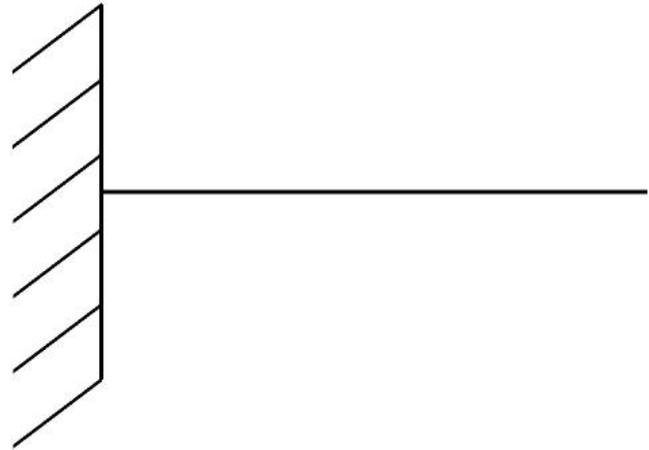
Vincoli

- I vincoli impediscono i gradi di libertà dei corpi
- I vincoli limitano il moto di un corpo
- A seconda della loro definizione, i vincoli inibiscono uno o più gradi di libertà contemporaneamente



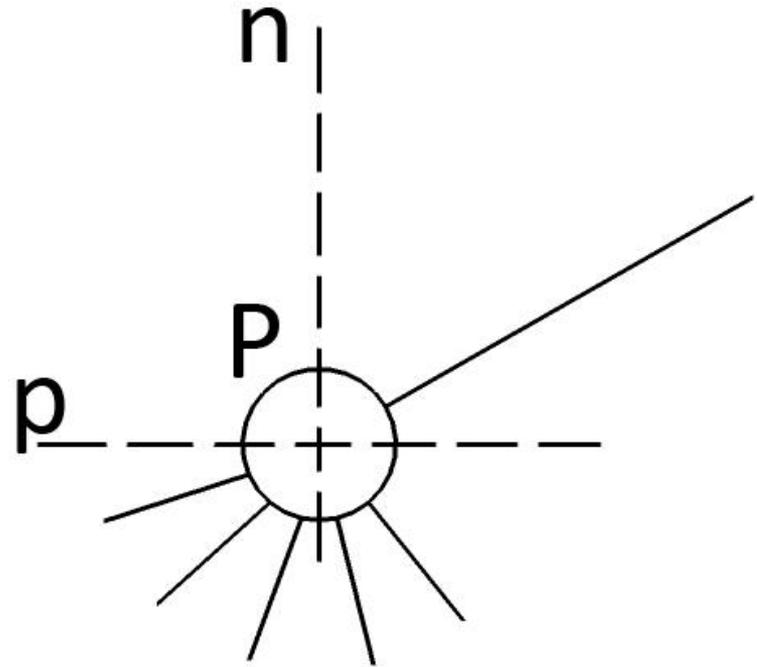
Incastro nel piano

- Incastro: vincola tutti i gradi di libertà del corpo, traslazioni e rotazioni
- Si può realizzare con una “saldatura” o una “flangia” che collega il corpo a terra (tratteggio)



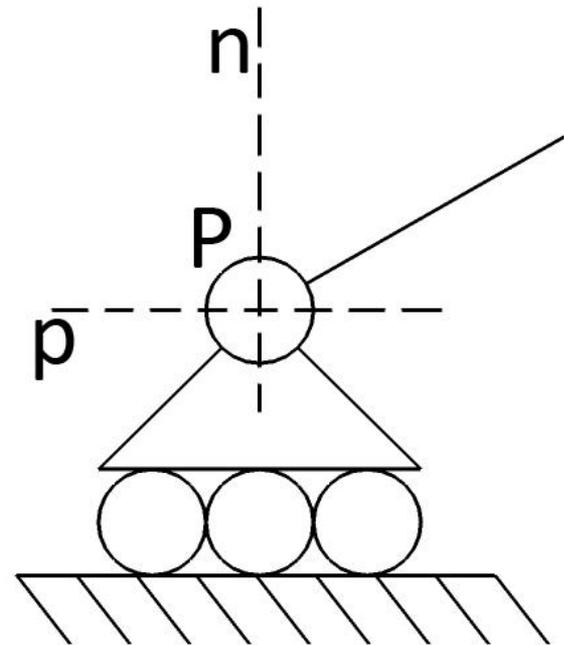
Cerniera nel piano

- Cerniera: inibisce i due gradi di libertà traslatori del corpo. Permette le rotazioni intorno al centro del cerchio che diventa il centro di istantanea rotazione
- Se fissata a terra si aggiunge il tratteggio
- La cerniera può collegare più parti di struttura



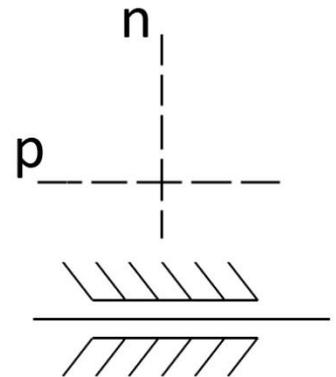
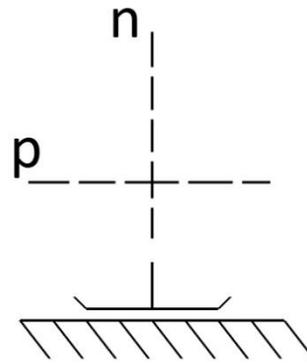
Appoggio nel piano

- Carrello o appoggio: impedisce un solo grado di libertà traslatorio, quello ortogonale al piano di appoggio
- Permette la rotazione intorno alla cerniera e la traslazione parallela al piano di appoggio



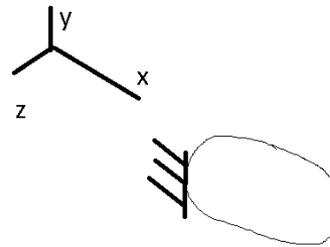
Pattino nel piano

- Permette la traslazione in direzione dell'appoggio
- Non permette la rotazione e la traslazione ortogonale all'appoggio

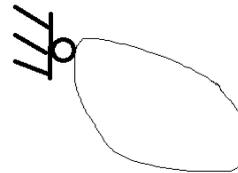


Vincoli nello spazio

- L'incastro nello spazio inibisce tutti e sei i gradi di libertà del corpo rigido
- La cerniera nello spazio impedisce le tre traslazioni del punto ma permette le tre rotazioni
- L'appoggio nello spazio vincola il punto alla traslazione nella direzione perpendicolare al piano di appoggio



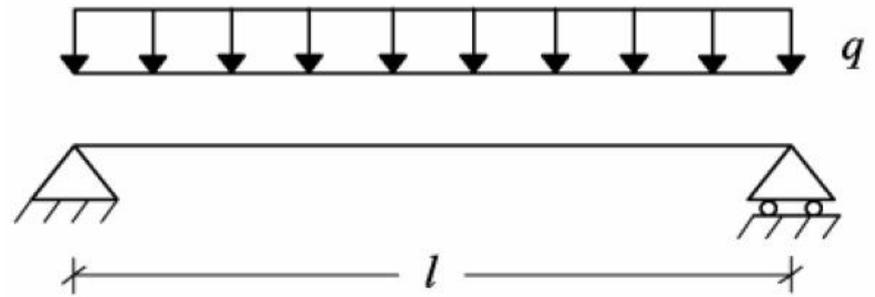
tre traslazioni e tre rotazioni impediti



tre traslazioni impediti
tre rotazioni permesse

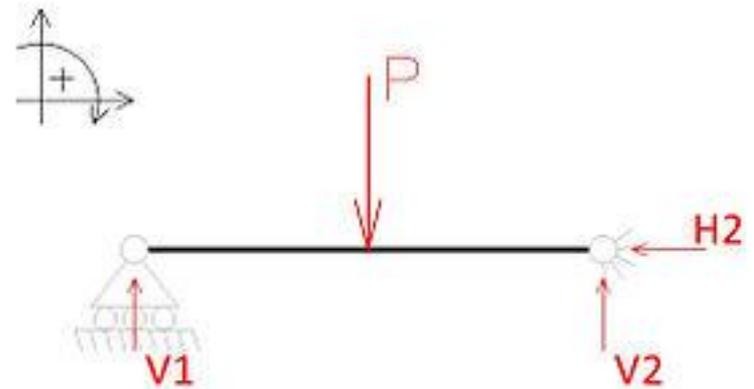
Statica della trave

- La trave nel piano ha tre gradi di libertà
- Quando i vincoli impediscono meno di tre gradi di libertà, la trave si dice *labile*
- Quando i vincoli impediscono tre gradi di libertà, la trave si dice *isostatica*
- Quando i vincoli impediscono più di tre gradi di libertà, la trave si dice *iperstatica*



Trave isostatica

- Poiché inibisco tre gradi di libertà con tre vincoli non conosco a priori le tre reazioni vincolari
- Le reazioni vincolari si ricavano imponendo tre equazioni di equilibrio
- Ogni equazione di equilibrio può essere alla traslazione o alla rotazione



Equazioni cardinali della statica

- Affinché un corpo sia in equilibrio, condizione necessaria e sufficiente è che siano nulli:
- La risultante dei carichi e delle reazioni vincolari
- Il momento risultante dei carichi e delle reazioni vincolari

$$\vec{r} = \sum_i \vec{f}_i = 0$$

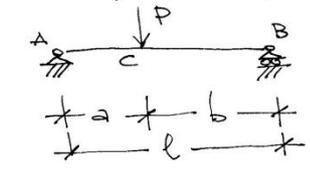
$$\vec{m} = \sum_i \vec{b}_i \times \vec{f}_i = 0$$

- Dove b_i sono i bracci delle forze rispetto un punto qualsiasi

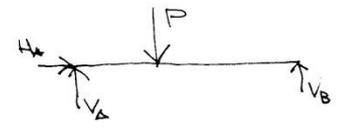
Esempio risolto

- L'esempio mostra una trave appoggiata con carico concentrato fra i vincoli
- Al posto dei vincoli si sostituiscono le reazioni vincolari corrispondenti ai gradi di libertà inibiti
- Gli equilibri alla traslazione orizzontale, alla traslazione verticale e alla rotazione intorno al punto A, forniscono le tre equazioni necessarie a ricavare le reazioni vincolari

TRAVE CON CERNIERA E CARRELLO ALLE ESTREMITA' (TRAVE APPOGGIATA) SOTTOPOSTA A CARICO CONCENTRATO VERTICALE



SCHEMA STRUTTURALE: il carico P è applicato nel punto C distante a dall'estremo A



SCHEMA STATICO: H_A e V_A sono le reazioni vincolari della cerniera, V_B quella del carrello

OTTENIAMO IL VALORE DELLE REAZIONI VINCOLARI:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l} \curvearrowright + \\ \uparrow + \end{array} \\
 \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A - P + V_B = 0 \\ P \cdot a - V_B \cdot l = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = P - V_B \\ V_B = P \cdot \frac{a}{l} \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = P - P \cdot \frac{a}{l} \\ V_B = P \cdot \frac{a}{l} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = P \left(1 - \frac{a}{l} \right) \\ V_B = P \cdot \frac{a}{l} \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = P \cdot \left(\frac{l-a}{l} \right) \\ V_B = P \cdot \frac{a}{l} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_A = 0 \\ V_A = P \cdot \frac{b}{l} \\ V_B = P \cdot \frac{a}{l} \end{array} \right.
 \end{array}$$