Richiami di algebra lineare

I sistemi di equazioni lineari

vettore

- Vettore: una sequenza ordinata di elementi o numeri, identificati da un indice di riga
- (a1, a2, a3, … an)

$$\begin{vmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{vmatrix}$$

- Rappresentabile in riga o in colonna
- Struttura facilmente implementabile nei linguaggi di programmazione: fortran, c++, python, ecc…
- ARRAY[i] -> facendo variare l'indice all'interno di un ciclo si accede agli elementi del vwttore

matrice

- Matrice: estensione del vettore in due dimensioni
- Ogni elemento è identificato dall’indice di riga e dall’indice di colonna

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a33 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}$$

- Una matrice 3x2 avrà tre righe e due colonne
- MATRIX[i,j] -> facendo variare un indice in un primo ciclo e l’altro indice in un secondo ciclo annidato nel primo, si accede agli elementi della matrice

Somma di matrici

- Solo matrici con uguale numero di righe e colonne possono sommarsi fra loro
- Si sommano gli elementi con uguale indice di riga e di colonna

$$\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b11 & b12 \\ b21 & b22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a11+b11 & a12+b12 \\ a21+b21 & a22+b22 \end{vmatrix}$$

Matrice simmetrica

- Una matrice si definisce simmetrica quando scambiando l'indice di riga con l'indice di colonna si ottiene lo stesso elemento
- aij=aji

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Prodotto righe per colonne

- Moltiplica una matrice per un vettore o due matrici
- Perché la moltiplicazione sia possibile, l'indice di colonna della prima matrice deve corrispondere all'indice di righe della seconda matrice
- Il prodotto righe per colonne non è commutativo

esempio

- Esempio di prodotto fra una matrice 3x2 ed una matrice 2x1, ovvero un vettore colonna a due righe

$$\begin{Vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{Vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} b1 \\ b2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a11 \cdot b1 + a12 \cdot b2 \\ a21 \cdot b1 + a22 \cdot b2 \\ a31 \cdot b1 + a32 \cdot b2 \end{vmatrix}$$

- Il risultato è un vettore colonna con tre righe: 3x2 moltiplicato 2x1 = 3x1 ; si annulla l’indice interno

Sistemi di equazioni

- Un sistema di due equazioni in due incognite si può scrivere in forma estesa come

$$
\begin{aligned}
ax + by &= f \\
cx + dy &= g
\end{aligned}
$$

Sistemi di equazioni

- Un sistema di equazioni si può scrivere in forma compatta come prodotto fra matrice dei coefficienti e vettore delle incognite, uguale al vettore dei termini noti

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f \\ g \end{vmatrix}$$

coefficienti

incognite

termini noti

Soluzione di un sistema di equazioni

- Le incognite valgono

$$x = \frac{f \cdot d - g \cdot b}{a \cdot d - c \cdot b}$$

$$y = \frac{a \cdot g - f \cdot c}{a \cdot d - c \cdot b}$$

- Inserendo coefficienti e termini noti in un foglio di excel, si può evitare la soluzione manuale per sostituzione